Tipps zur Serie 9:

Aufgabe 9.1:

a)

Wertet einfach einige Punkte des Feldes aus und zeichnet die angehefteten Vektoren proportional zu ihrer Länge in den $\mathbb{R}^2$. Braucht nur so viele Punkte damit ihr ein Gefühl dafür bekommt, wie es aussieht.

b)

Auch hier einfach in einigen Punkten starten. Falls die Zeichnung des Vektorfeldes gut gelungen ist, sind die Flusslinien sehr einfach erkennbar.

c)

Kann man verschieden zeigen:

i) Überprüft, ob K konservativ ist mit $\mathrm{rot}(K) = 0$ (dafür $K(x,y,z) = (x^2 - y, x, 0)$ betrachten).

ii) Nehmt an es gibt ein Potential, stellt die Gleichungen für $\nabla P = K$ auf und integriert P_x & P_y nach x resp. y -> Gibt es ein P, welches beide Gleichungen erfüllt?

d)

Hängen Potential & Flusslinien zusammen? Was sagen die einzelnen Begriffe aus? -> Theorie

e)

Wir haben einerseits $y'(x) = F(x,y)$ im 1D & $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = K(x(t), y(t))$ hier. Wie wird das Richtungsfeld im 1D genau definiert (repetieren), wie die Flusslinien im 2D (Theorie).
Wie könnt ihr K wählen, damit ihr etwas analoges zum 1D Fall erhaltet?

Aufgabe 9.2:

Parametrisiert zuerst die Menge des Tetraeders und formt ihn dann zu einfachen Bereichen um, damit ihr Fubini anwenden könnt. Eine Transformation ist nicht nötig.

Aufgabe 9.3:

Parametrisiert den Weg γ im $\mathbb{R}^2$ geschickt als $\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ und berechnet das Linienintegral wie in der Theorie gezeigt. Spaltet wo nötig den Weg in Glatte Segmente (1-Ketten) auf.

Achtung: falls nur in eine Richtung (dx, dy) integriert wird, so ist die fehlende Komponente des Vektorfeldes einfach 0.

Aufgabe 9.4:

Was ihr erkennen müsst:

$$\int_\gamma \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix} ds = \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$\Rightarrow$ Ihr müsst in dieser Aufgabe absolut nichts berechnen.

Aufgabe 9.5:

Achtung: $dx = ds$ in der Aufgabenstellung, da $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ein Vektor gemeint ist.

Einfach wie in der Theorie gesehen berechnen.

Aufgabe 9.6:

a)

Das ist der gesehene Satz aus der Theorie

$$p(x) := \int_{x_0}^{x} K \cdot ds$$

wählt einfachheitshalber $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ und, da das Linienintegral konservativer Felder wegunabhängig ist, den geraden Weg mit

$\gamma : t \mapsto \begin{bmatrix} xt \\ yt \end{bmatrix}$ von x_0 zu x.

b)

Gegebene Gleichungen aufstellen. Gute Methode: x-Komp. des Potentials betrachten, nach x Integrieren $\rightarrow$ Kandidat für Potential mit von y abhängiger Integrationskonstante erhalten. Den Kandidaten nun nach y ableiten & mit y-Komp. des Vektorfeldes vergleichen. Integration der gef. y-Komp. des Potentials nach y liefert noch eine konstante Integrationskonstante $\rightarrow$ nicht vergessen.

c)

Stimmen sie überein? Welche Form hat der Unterschied?

d)

b) wiederholen, existiert eine Lösung beim Vergleich der Ableitung des Kandidaten nach y und der y-Komp. des Vektorfeldes?

e)

Mathematisch könntet ihr a) immernoch zur Definition eines Potentials nutzen, wäre diese Definition aber eindeutig? Was würde passieren, wenn ihr einen anderen Pfad von $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ zu $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ wählen würdet?